KESTABILAN *BEHAVIOR* MODEL SIR (*SUSCEPTIBLE, INFECTIVES, REMOVED*) PADA PENYAKIT HIV (*HUMAN IMMUNODEFICIENCY VIRUS*)

TUGAS AKHIR

Disusun sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

SRI DAMAYANTI
10854003979

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

KESTABILAN *BEHAVIOR* MODEL SIR (*SUSCEPTIBLE, INFECTIVES, REMOVED*) PADA PENYAKIT HIV (*HUMAN IMMUNODEFICIENCY VIRUS*)

SRI DAMAYANTI
10854003979

Tanggal Sidang : 02 Oktober 2012
Periode Wisuda : Oktober 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini menjelaskan tentang kestabilan *behavior* model SIR pada penyakit HIV. Pada model ini diasumsikan terdapat individu terinfeksi tinggi dan terinfeksi lebih tinggi di kelas infeksi. Hasil yang diperoleh adalah ada dua titik kestabilan *behavior* pada model SIR yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)$ stabil asimtotik lokal jika $\frac{r\beta}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2} < 1$, dan titik ekulibrium endemik penyakit $(S^*, I^*, {I^*}_1, {I^*}_2)$ tidak stabil jika $\frac{r\beta}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2} > 1$.

Katakunci : Kestabilan *Behavior*, Model SIR, Titik Ekuilibrium.

BEHAVIOR STABILITY SIR MODEL (SUSCEPTIBLE, INFECTIVES, REMOVED) FOR HIV (HUMAN IMMUNODEFICIENCY VIRUS)

SRI DAMAYANTI
10854003979

Date of Final Exam : 02 October 2012
Graduation Ceremony Period : October 2012

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACK

This thessis discussed about behavior stability for SIR model in HIV disease. In this model, we assumed there are two condition high infective and higher infective individuals in infective class. The result has obtained one disease-free equilibrium $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)$ *which is locally asymtotic stable if* $\frac{r\beta}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2} < 1$, *and endemic equilibrium* $(S^*, I^*, I^*{}_1, I^*{}_2)$ *is unstable if* $\frac{r\beta}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2} > 1$.

Keyword *: Behavior Stability, Equilibrium Point, SIR Model.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **"Kestabilan *Behavior* Model SIR (*Susceptible, Infectives, Removed*) pada Penyakit HIV (*Human Immunodeficiency Virus*)"**. Shalawat berserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua mendapat syafa'at nya kelak.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, nasehat, perhatian serta semangat dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pertama sekali penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tuaku tersayang yang selalu memberikan motivasi dan kasih sayang sehingga penulis selalu memiliki semangat dalam penulisan tugas akhir ini, dan adik-adikku yang selalu memberikan dukungan serta doanya. Semoga Allah SWT selalu merahmati mereka, serta memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat, Amin.

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak memberikan bantuan, meluangkan banyak waktu kepada penulis, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini hingga selesai.

7. Semua Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membimbing penulis selama kuliah.
8. Sahabat-sahabatku (Lia, Ratna, Siti, Nazar, Ali, Ayu) yang senantiasa memberikan bantuan, dukungan serta motivasi.
9. Teman-teman jurusan matematika angkatan 2008, kakak dan adik tingkat jurusan matematika angkatan pertama sampai terakhir, serta teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu.
10. Semoga amal kebaikan yang mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin.

Penulis sangat menyadari dalam penulisan tugas akhir ini masih banyak kekurangan dan kesalahan, oleh karena itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi membangun demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhirnya, penulis berharap tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak yang memerlukannya.

Pekanbaru, 02 Oktober 2012

Penulis

Sri Damayanti

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyebaran berbagai jenis penyakit menular telah menjadi perhatian yang luas dari masyarakat karena telah banyak mengakibatkan kematian dan kerugian di berbagai bidang. Masalah ini akan semakin berdampak buruk jika tidak segera diatasi dengan baik. Dewasa ini terdapat berbagai macam penyakit yang harus diwaspadai karena dapat mengakibatkan kematian. Salah satu penyakit yang harus diwaspadai adalah *Acquired Immune Deficiency Syndrome* (AIDS) karena berakibat kematian pada penderitanya. AIDS merupakan penyakit yang menyerang sistem kekebalan tubuh yang disebabkan oleh *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) atau dengan kata lain AIDS adalah fase terakhir dari infeksi HIV.

Cara penularan HIV dapat melalui hubungan seks, pemakaian suntik bersama penderita, ibu penderita HIV positif ke bayinya dan lain-lain. Dari beberapa cara penularan tersebut, penularan dari ibu hamil ke bayinya adalah cara penularan yang efektif. Penularan HIV dari ibu hamil ke bayinya disebut penularan secara vertikal dimana penularan dapat terjadi pada masa kehamilan, saat melahirkan, setelah melahirkan maupun saat menyusui. Oleh karena itu, penularan HIV transmisi vertikal harus dikendalikan penyebarannya. Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika memberikan peranan yang penting dalam mencegah dan mengendalikan meluasnya penyebaran penyakit. Penyakit-penyakit tersebut dapat dimodelkan ke dalam model matematika yaitu model epidemi SIR (*Susceptible-Infective-Recovered*) yang dikenalkan oleh *Kermack dan Mckendrick* (1927).

Tamrin (2007), mengatakan model SIR (*Susceptibles*, *Invectives*, *Recovered*) pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam populasi tertutup dan bersifat epidemik.

Salah satu contoh mengenai pembentukan model SIR yaitu pada penyakit yang tidak fatal dan berdasarkan asumsi-asumsi yang dibuat. Setelah model terbentuk, kemudian dicari solusi analitis dan titik kesetimbangannya, yang selanjutnya diinterpetasikan dalam permasalahan yang sesungguhnya dalam kehidupan nyata. Dalam hal ini adalah mengenai perilaku penyebaran penyakit dan eksistensinya, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

Beberapa penelitian tentang model penyebaran penyakit diantaranya adalah *Behavior Stability in two SIR-Style Models for HIV,* tahun 2010 tulisan S. Seddighi Chaharborj dkk yang membahas dua model matematika yaitu model SIR dan Model SIR modifikasi dengan asumsi terdapat individu terinfeksi tinggi dan terinfeksi lebih tinggi di kelas infeksi pada model SIR modifikasi. Kemudian *Model SIR Penyakit Tidak Fatal,* tahun 2007 karangan Husni Tamrin dan M. Zaki Riyanto yang membahas penyebaran penyakit tidak fatal menggunakan model SIR dengan asumsi populasi tertutup atau tidak ada proses migrasi. Selanjutnya penelitian penyebaran penyakit dengan judul *Kestabilan Global pada Model Endemik SIR dengan Migran,* tahun 2009 karangan Fajar Budianto yang membahas model SIR dengan asumsi jumlah populasi dalam suatu wilayah adalah besar dan individu dalam populasi bercampur secara homogen. *Model penyebaran penyakit melalui hubungan seksual (PSH):Gonorrhea dan HIV/AIDS,*tahun 2011 yang membahas model penyebaran penyakit melalui hubungan seksusal (PSH), khususnya pada penyakit Gonorrhea dan HIV/AIDS dengan konsep model SIR, SIS, IA dan SIAR, dan penelitian dengan judul *Pembuatan model matematika dengan software untuk penghitung tingkat vaksinasi pada penyebaran penyakit menular,* karangan Asep K. Supriatna dkk (2005), yang membahas model penyebaran penyakit dengan model SIR dan SIS.

Berdasarkan paparan di atas, penulis tertarik untuk meneliti model SIR dengan judul " **Kestabilan *Behavior* Model SIR (*Susceptible, Infectives, Removed*) pada Penyakit HIV (*Human Immunodeficiency Virus*)**".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penyelesaian tugas akhir ini adalah “Bagaimana memodelkan penyebaran penyakit menular HIV dengan menggunakan kestabilan *behavior* model SIR pada penyakit HIV ?”.

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan ini menjadi lebih terarah, permasalahan dibatasi pada pembahasan pembahasan yang mengulas pada jurnal *Behavior Stability in two SIR-Style Models for HIV* dari S. Seddighi Chaharborj dkk yang membahas dua model matematika yaitu model SIR dan Model SIR modifikasi dengan asumsi terdapat individu terinfeksi tinggi dan terinfeksi lebih tinggi di kelas infeksi pada model SIR modifikasi

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

a. Memperoleh model penyakit HIV dengan menggunakan kestabilan *behavior* model SIR pada penyakit HIV.
b. Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium penyakit HIV menggunakan kestabilan *behavior* model SIR pada penyakit HIV.
c. Mengetahui hasil analisa kestabilan *behavior* model SIR pada penyakit HIV.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti pemodelan matematika, sistem persamaan diferensial, kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial linear dan kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial nonlinear.

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan kestabilan *behavior* model SIR pada penyakit HIV.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan pembahasan mengenai model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit menular dengan menggunakan kestabilan *behavior* model SIR pada penyakit HIV.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial.

Bentuk umum sistem persamaan diferensial nonlinear yang terdiri dari n persamaan adalah :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan f_i adalah fungsi nonlinear, untuk $i = 1,2, \dots, n$. Sistem (2.1) mempunyai penyelesaian jika f_i merupakan fungsi kontinu. Sistem persamaan (2.1) dapat dinyatakan kedalam bentuk

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

dengan $\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, dan $f = (f_1, f_2, \dots f_n)^T$.

Sistem persamaan (2.1) dikatakan linear jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing – masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$. Sebaliknya disebut sistem persamaan diferensial nonlinear. Jika Sistem persamaan (2.1) linear, maka Sistem persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sistem persamaan (2.3) dapat dinyatakakan dalam bentuk $\dot{x} = Ax$, dengan A matriks ukuran $n \times n$, dan $x \in E$. Sistem persamaan (2.2) disebut sistem nonlinear jika tidak dapat dinyatakakan dalam bentuk system persamaan (2.3).

2.2 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*)

Suatu sistem dinamis dikatakan berada dalam keadaan setimbang jika sistem tersebut tidak berubah sepanjang waktu. Oleh karena itu, suatu populasi dikatakan berada dalam keadaan setimbang jika jumlah populasi tersebut tidak berubah sepanjang waktu. Adapun defenisi tentang kesetimbangan dan kestabilan diberikan pada defenisi berikut ini :

Definisi 2.1 (Meiss, 2007)Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) sistem persamaan (2.2) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Secara umum, model penyebaran penyakit biasanya mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada individu yang terinfeksi penyakit.

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar ($\boldsymbol{R_0}$)

Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*).

Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan rata-rata individu infeksi skunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung didalam populasi *susceptible.* Namun ada pula yang mengartikan rasio atau perbandingan yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected.*

Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk mengetahui adanya peningkatan ataupun penurunan jumlah individu yang terinfeksi. Semakin bertambahnya individu yang terinfeksi dapat mengakibatkan kondisi endemik, sedangkan semakin berkurangnya individu yang terinfeksi dapat mengakibatkan penyakit infeksi menghilang dengan sendirinya dari populasi.

Jika $R_0 > 1$ maka dalam populasi telah terjadi epidemic dan apabila tidak segera dilakukan penanganan akan terjadi suatu epidemic (wabah) atau secara metematika adalah tidak stabil, sebaliknya jika $R_0 < 1$ maka dalam populasi tidak terjadi epidemic atau secara matematika stabil asimtotik lokal.

2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Konsep perilaku sistem pada titik kesetimbangan (*equilibrium*) dikenal sebagai kestabilan titik kesetimbangan. Kestabilan tersebut merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem. Di bawah ini definisi formal mengenai kestabilan titik kesetimbangan :

Definisi 2.2 (Kocak, 1991) Titik kesetimbangan (*equilibrium*) $\bar{x} \in R^n$ dari sistem persaan (2.2) dikatakan :

a. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi system persamaan (2.2) $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
b. Stabil asimtotik lokal jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$
c. Tidak stabil jika titik e*quilibrium* $\bar{x} \in R^n$ tak memenuhi *(a).*

Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil global. Sementara itu jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $\bar{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil asimtotik global.

Definisi 2 masih terlalu sulit digunakan dalam penentuan kestabilan didekat titik kesetimbangan. Oleh karena itu, dibutuhkan metode lain yang lebih mudah penerapannya dalam penentuan kestabilan di dekat titik kesetimbangan. Metode yang dimaksud adalah metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matrik Jacobian di titik $\bar{x}$. Di bawah ini diberikan definisi matriks Jacobian di titik $\bar{x}$.

Definisi 2.3 (Kocak, 1991) diberikan $f = (f_1, \ldots, f_n)$ pada sistem persamaan (2.2) dengan $f_i \in c^1(E), i = 1,2, \ldots, n$. demikian matriks Jacobian dari f dititik x.

$$J(f(\boldsymbol{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Setelah ditentukan matriks Jacobian, maka penyelesaian dengan metode linearisasi dapat dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Berikut definisi mengenai metode linearisasi :

Definisi 2.4 (Meiss, 2007) Sistem $\dot{x} = J(f(\bar{x}))\, x$ disebut linearisasi sistem persamaan (2.2) di $(\bar{x})$.

Dengan menggunakan matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$, sifat kestabilan titik *equilibrium* $\bar{x}$ dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik hiperbolik.

Definisi 2.5 (Meiss, 2007) Titik equilibrium $\bar{x}$ disebut titik equilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol.

Kestabilan sistem persamaan (2.2) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matrik Jacobian $J(f(x))$. Kriteria kestabilan titik *equilibrium* dari sistem persamaan (2.2), disajikan pada Teorema dibawah ini :

Teorema 2.1 (kocak, 1991)

a) Jika semua nilai eigen dari matrik Jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari sistem persamaan (2.2) stabil asimtotik.

b) Jika terdapat nilai eigen dari matrik jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari sistem persamaan (2.2) tidak stabil.

Di bawah ini akan diberikan beberapa contoh mengenai kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem linear dua variabel terikat.

Pandang Sistem linear :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dengan a, b, c dan d konstan. Misalkan λ nilai eigen dari Matriks A $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik di atas, diperoleh

$$\lambda_{1.2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2},$$

atau

$$\lambda_{1.2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dengan $p = a + d$ dan $q = ad - bc$.

Stabilitas Sistem linier (2.2) dapat diterangkan sebagai berikut:

1). $\lambda_{1.2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda jika $q > 0$:

- $\lambda_{1.2}$ semua positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- $\lambda_{1.2}$ semua negatif jika $p < 0$ → stabil.

b. $\lambda_{1.2}$ beda tanda jika $q < 0$ → tidak stabil.

c. Salah satu dari $\lambda_{1.2}$ nol, jika $q = 0$.

- Akar lainnya positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- Akar lainnya negatif jika $p < 0$ → stabil netral.

2). $\lambda_{1.2}$ real dan sama jika $\Delta = 0$.

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

- Keduanya positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- Keduanya negatif jika $p < 0$ → stabil.

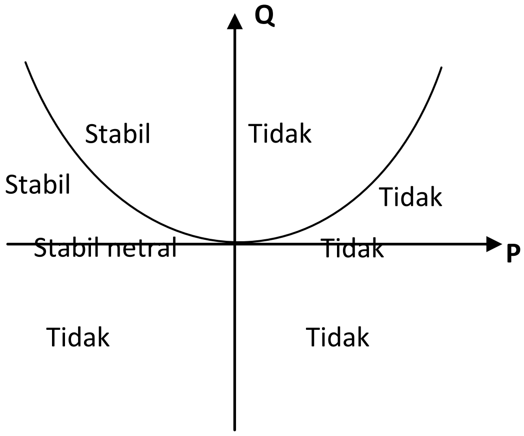
b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p > 0$ → tidak stabil.

3). $\lambda_{1.2}$ kompleks bila $\Delta < 0$.

a. Re $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

- Re $\lambda_{1.2}$ semua positif bila $p > 0$ → tidak stabil.
- Re $\lambda_{1.2}$ semua negatif bila $p < 0$ → stabil.

b. Re $\lambda_{1.2}$ bila $p = 0$ → stabil netral



Gambar 2.1. Bidang Fase Sistem Linier

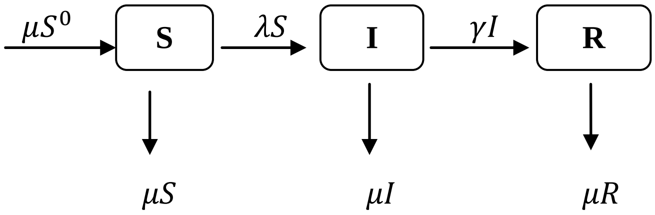
2.5 Model SIR

Model SIR adalah model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit dengan membagi populasi menjadi tiga kelas yaitu *susceptible* atau kelas yang berisi individu rentan terhadap penyakit yang dibicarakan, kelas *infectives* atau kelas yang berisi individu yang telah terinfeksi penyakit dan bisa menularkan penyakit yang sedang dibicarakan, dan *removed* adalah kelas yang berisi individu yang telah mati akibat perkembangan HIV.

Di bawah ini akan diberikan contoh model SIR untuk penyakit menular HIV, dengan S adalah proporsi individu *susceptible,* I adalah proporsi individu *infectives*, dan R adalah proporsi individu *removed* sehingga $S + I + R = 1$. Pada model ini diasumsikan :

a) Adanya laju migrasi konstan (kelahiran/individu yang datang) kedalam populasi yang beresiko tinggi yang disebut individu rentan baru dilambangkan dengan $S^0 > 0$.
b) Laju kematian alami atau meninggalkan populasi yang disebabkan bukan karena HIV/AIDS dilambangkan dengan μ. Dengan laju kematian alami konstan $\mu > 0$.
c) Laju kematian dikarenakan perkembangan HIV/AIDS dari *infected* menjadi *removed* dilambangkan dengan $\gamma > 0$.
d) Laju penularan dari *susceptible* menjadi *infected* yaitu $\lambda = r\beta \frac{I}{S+I}$,dengan $r > 0$ menyatakan banyaknya hubungan seksual yang terjadi pertahun, $\beta > 0$ adalah probabilitas penularan, yang keduanya adalah konstan dan $\frac{I}{S+I}$ adalah proporsi dari individu yang terinfeksi ke individu yang aktiv secara seksual.

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas maka didapat diagram alir model SIR seperti gambar di bawah ini :



Gambar 2.2 Model SIR pada Penyakit HIV.

Berdasarkan model pada gambar 2.2 diatas, maka didapat sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t) \tag{2.4.a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda(t)S(t) - (\mu + \gamma)I(t) \tag{2.4.b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \tag{2.4.c}$$

dengan $S + I + R = 1$, yang berarti proporsi pada populasi merupakan jumlah kelas *susceptible*, *infected*,dan kelas *removed.*

Solusi sistem persamaan (2.4) adalah himpunan $\Gamma_1 = \{(S, I, R)\ |S + I + R = 1\ dan\ S, I, R \geq 0\}$. Karena $R = 1 - I - S$, dan R bisa dicari setelah S dan I ditentukan, maka untuk sementara persamaan (2.4.c) diabaikan, sehingga sistem persamaan dirubah menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = \mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda(t)S(t) - (\mu + \gamma)I(t) \tag{2.5}$$

dengan $S + I \leq 1$.

Solusi sistem persamaan (2.5) adalah himpunan $\Gamma_2 = \{(S, I)|S + I \leq 1\ dan\ S, I \geq 0\}$. Setelah diperoleh sistem persamaan diferensial dari model diatas, maka akan ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.

2.5.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang sakit, sehingga $I = 0$.

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan sistem persamaan (2.5), maka sistem persamaan (2.5) diberi nilai nol atau sama dengan nol, sehingga sistem persamaan menjadi

$$\mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t) = 0 \qquad (2.6.a)$$

$$\lambda(t)S(t) - (\mu + \gamma)I(t) = 0 \qquad (2.6.b)$$

Kemudian untuk mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit maka dilakukan penyelesaian di bawah ini :

$$\mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t) = 0$$

dengan $\lambda = r\beta \frac{I}{S+I}$

$$\mu(S^0 - S) - \lambda S = 0$$

$$\mu(S^0 - S) - r\beta \frac{I}{S + I} S = 0$$

$$\mu(S^0 - S) = 0$$

$$S^0 - S = 0$$

Sehingga diperoleh untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = S^0$.

Berdasarkan penyelesaian diatas, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $\big(\hat{S}, \hat{I}\big) = (S^0, 0)$.

2.5.2 Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi atau $I > 0$,

dari sistem persamaan (2.6) akan diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu (S^*, I^*) Misalkan titik ekuilibrium S adalah S^*, sehingga dari persamaan (2.6.a) diperoleh

$$\lambda S - (\mu + \gamma)I = 0$$

dengan $\lambda = r\beta \frac{I}{S+I}$ dan $S = S^*$ maka persamaan (2.6.b) menjadi

$$r\beta \frac{I}{S^* + I} S^* - (\mu + \gamma)I = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mu + \gamma +)I = r\beta \frac{I}{S^* + I} S^*$$

Karena $I \neq 0$, maka diperoleh

$$(\mu + \gamma) = \frac{r\beta S^*}{S^* + I}$$

$$(\mu + \gamma)(S^* + I) = r\beta S^*$$

$$\Leftrightarrow \ S^*(\mu + \gamma) + I(\mu + \gamma) = r\beta S^*$$

$$\Leftrightarrow \ I(\mu + \gamma) = r\beta S^* - S^*(\mu + \gamma)$$

$$I = \left(\frac{r\beta - (\mu + \gamma)}{(\mu + \gamma)}\right) S^*$$

$$= \left(\frac{r\beta}{\mu + \gamma} - 1\right) S^*$$

Didefinisikan $R_0 = \frac{r\beta}{\mu+\gamma}$, maka diperoleh I untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $I^* = (R_0 - 1)\, S^*$.

Selanjutnya subtitusi $I^* = (R_0 - 1)\, S^*$ ke dalam persamaan (2.6.a) diatas sehingga

$$\mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(S^0 - S) - r\beta \frac{I}{S + I} S = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu S^0 - \mu S - \frac{r\beta IS}{S + I} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu S^0(S + I) - \mu S\,(S + I) - r\beta IS = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu S^0 S + \mu S^0 I - \ \mu S^2 - \mu SI - \ r\beta IS = 0$$

$$\mu S^0 S^* + \mu S^0(R_0 - 1)\, S^* - \ \mu S^{*2} - \mu S^{*2}(R_0 - 1) - \ r\beta(R_0 - 1)S^{*2} = 0$$

$$\Leftrightarrow S^*\big(\mu S^0 + \ \mu S^0(R_0 - 1)\big) - S^{*2}(\mu + \mu(R_0 - 1) + r\beta(R_0 - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{S^*}{S^{*2}}\big(\mu S^0 + \ \mu S^0(R_0 - 1)\big) - \frac{S^{*2}}{S^{*2}}(\mu + \mu(R_0 - 1) + r\beta(R_0 - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{S^*}\big(\mu S^0 + \ \mu S^0(R_0 - 1)\big) - (\mu + \mu(R_0 - 1) + r\beta(R_0 - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{S^*}\left(\mu S^0 + \mu S^0(R_0 - 1)\right) = \mu + \mu(R_0 - 1) + r\beta(R_0 - 1)$$

$$S^* = \frac{\mu S^0 + \mu S^0(R_0 - 1)}{\mu + \mu(R_0 - 1) + r\beta(R_0 - 1)}$$

$$= \frac{\mu S^0 + \mu S^0 R_0 - \mu S^0}{\mu + \mu R_0 - \mu + r\beta(R_0 - 1)}$$

$$= \frac{\mu S^0 R_0}{\mu R_0 + R_0(\mu + \gamma)(R_0 - 1)}$$

$$= \frac{\mu S^0}{\mu + (\mu + \gamma)(R_0 - 1)}$$

$$= \frac{\mu S^0}{\mu + \mu R_0 - \mu + \gamma R_0 - \gamma}$$

$$= \frac{S^0}{1 + R_0 - 1 + \frac{\gamma R_0}{\mu} - \frac{\gamma}{\mu}}$$

$$= \frac{S^0}{1 + R_0 - 1 + \frac{\gamma}{\mu}(R_0 - 1)}$$

$$= \frac{S^0}{1 + (R_0 - 1)\left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik penyakit adalah $S^* = \left(\frac{S^0}{1+(R_0-1)\left(1+\frac{\gamma}{\mu}\right)}\right)$.

Dari penyelesaian diatas, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $(S^*, I^*) = \left(\frac{S^0}{1+(R_0-1)\left(1+\frac{\gamma}{\mu}\right)}, (R_0 - 1)S^*\right)$.

Berdasarkan titik ekulibrium endemik penyakit diperoleh bilangan reprodouksi dasar $R_0 = r\beta \frac{1}{\mu+\gamma}$.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian dalam tugas akhir ini adalah studi literatur dengan mempelajari buku-buku dan jurnal-jurnal yang berhubungan dengan penyakit epidemi, khususnya model SIR. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

a) Menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model SIR
b) Menggambar diagram alir untuk membentuk model matematika, diagram alir berfungsi untuk membentuk sistem persamaan differensialnya.
c) Mencari titik ekulibrium model. Titik ekulibrium yang akan dicari adalah titik ekulibrium bebas penyakit dan titik ekulibrium endemik penyakit.
d) Menentukan bilangan reproduksi dasar sebagai syarat cukup agar titik ekulibrium stabil asimtotik lokal atau tidak stabil.
e) Menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium.
f) Menyimpulkan hasil dari analisa kestabilan titik kesetimbangan.

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Pemodelan matematika merupakan suatu alat yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan permasalahan-permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari kedalam bentuk yang metematis. Dengan pemodelan metematika, permasalahan-permasalahan tersebut diharapkan menjadi lebih mudah untuk diselesaikan.

Pemodelan matematika juga dapat digunakan untuk memeodelkan penyebaran penyakit dalam populasi. Pada bab ini dibahas mengenai kestabilan *behavior* model SIR untuk penyakit menular HIV yang diturunkan ulang dari model SIR. Penurunan tersebut mengacu pada Seddighi (2010). Dari model yang diperoleh , ditentukan titik keseimbangannya. Selain itu, ditentukan parameter yang dapat digunakan untuk mengetahui peningkatan ataupun penurunan jumlah yang terinfeksi. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan terhadap titik kesetimbangan dengan menggunakan teorema. Kemudian

Sebagaimana yang diterangkan oleh Seddighi (2010), di dalam model SIR untuk penyebaran penyakit HIV penularan terjadi didalam suatu populasi yang individunya berada pada resiko tinggi dari HIV. Penyebaran penyakit infeksi dapat dimodelkan dengan mengelompokkan individu pada populasinya menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok *susceptible*, *infected*, *removed*. Kelompok *susceptible* didefinisikan sebagai kelompok individu yang sehat tetapi rawan untuk terinfeksi, kelompok *infected* didefenikan sebagai kelompok individu yang terinfeksi, sedangkan kelompok *removed* didefinisikan sebangai kelompok individu yang mati akibat penyakit HIV/AIDS. Dimisalkan $S(t)$ merupakan banyaknya individu pada kelompok *susceptible* dalam waktu t, $I(t)$ merupakan banyaknya individu pada kelompok *infected* dalam waktu t, dan $R(t)$ merupakan banyaknya individu pada kelompok *removed* dalam waktu t.

4.1 Asumsi-asumsi dalam Model

Untuk model SIR ini, asumsi atau catatan yang diberikan diantaranya sebagai berikut :

a) Adanya individu terinfeksi tinggi dan lebih tinggi di dalam kelas infeksi.

b) Adanya laju migrasi konstan (kelahiran/individu yang datang) kedalam populasi yang beresiko tinggi yang disebut individu rentan baru dilambangkan dengan $S^0 > 0$.

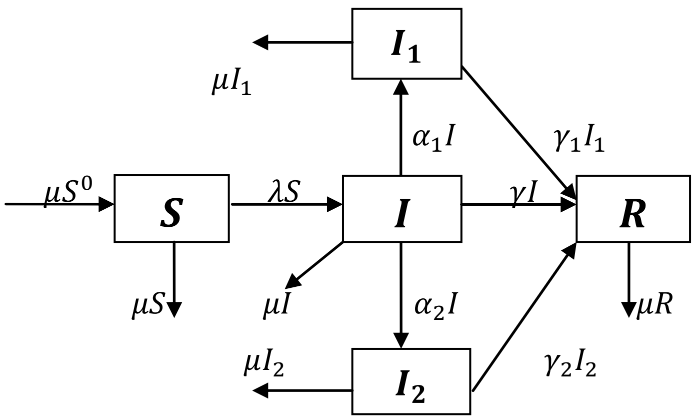
c) Laju kematian alami atau meninggalkan populasi yang disebabkan bukan karena HIV/AIDS dilambangkan dengan μ. Dengan laju kematian alami konstan $\mu > 0$.

d) Laju kematian dikarenakan perkembangan HIV/AIDS dari *infected* menjadi *removed* dilambangkan dengan $\gamma > 0$.

e) Laju penularan yaitu $\lambda = r\beta \frac{I}{S+I}$,dengan $r > 0$ menyatakan banyaknya hubungan seksual yang terjadi pertahun, $\beta > 0$ adalah probabilitas penularan, yang keduanya adalah konstan dan $\frac{I}{S+I}$ adalah proporsi dari individu yang terinfeksi ke individu yang aktiv secara seksual.

4.2 Kestabilan *Behavior* Model SIR

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas maka diperoleh diagram alir model SIR pada gambar dibawah ini :



Gambar 4.1 Kastabilan *Behavior* Model SIR pada Penyakit HIV.

Berdasarkan diagram alir diatas, diperoleh sistem persamaan diferensial yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \mu\left(S^0 - S(t)\right) - \lambda(t)S(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda(t)S(t) - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I(t)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1 I(t) - (\mu + \gamma_1)I_1(t) \qquad (4.1)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha_2 I(t) - (\mu + \gamma_2)I_2(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) + \gamma_1 I_1(t) + \gamma_2 I_2(t) - \mu R(t)$$

dengan S adalah *susceptibles*, I adalah *infected*, I_1 adalah *high-infected*, I_2 adalah *higher-infected*, R adalah *removed*, laju kematian alami $\mu > 0$ konstan, α_1 konstan adalah laju perpindahan individu *high-infected* dari kelas I ke I_1, α_2 konstan adalah laju perpindahan individu *higher-infected* dari kelas I ke I_2, laju migrasi $\mu s^0 > 0$ konstan, laju kematian $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ konstan masing-masing dari I, I_1, I_2 ke R dan laju terinfeksi adalah $\lambda = r\beta\,\frac{I}{S+I}$.

4.3 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium)*

Titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.1) dapat ditentukan dalam dua keadaan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit artinya tidak ada individu yang terserang penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit yang artinya selalu ada individu yang terserang penyakit dalam populasi.

Pada model SIR, individu *removed* merupakan individu yang telah mati disebabkan oleh perkembangan HIV/AIDS, sehingga tidak menarik untuk deperhatikan. Oleh karena itu, kelompok individu yang menarik untuk diperhatikan adalah kelompok *susceptible*, *infected*, *high-infected* dan *higher-infected*. Dengan demikian, sistem persamaan (4.1) dapat dibentuk menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = \mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda(t)S(t) - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I(t)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1 I(t) - (\mu + \gamma_1)I_1(t) \qquad (4.2)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha_2 I(t) - (\mu + \gamma_2)I_2(t)$$

4.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan sistem persamaan (4.2), maka masing-masing persamaan pada sistem persamaan (4.2) diberi nilai nol, sehingga sistem persamaan (4.2) menjadi :

$$\mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t) = 0 \qquad (4.3.a)$$

$$\lambda(t)S(t) - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I(t) = 0 \qquad (4.3.b)$$

$$\alpha_1 I(t) - (\mu + \gamma_1)I_1(t) = 0 \qquad (4.3.c)$$

$$\alpha_2 I(t) - (\mu + \gamma_2)I_2(t) = 0 \qquad (4.3.d)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terserang penyakit atau $I = 0$, maka dari persamaan pertama pada sistem persamaan (4.3) dilakukan penyelesaiaan untuk mendapatkan S pada titik kesetimbangan bebas penyakit :

$$\mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t) = 0$$

dengan $\lambda = r\beta \frac{I}{S+I}$

$$\mu(S^0 - S) - \lambda S = 0$$

$$\mu(S^0 - S) - r\beta \frac{I}{S + I} S = 0$$

$$\mu(S^0 - S) = 0$$

$$S^0 - S = 0$$

Sehingga diperoleh untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = S^0$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $\left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2\right) = (S^0, 0,0,0)$.

4.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi atau $I > 0$, dari sistem persamaan (4.3) akan diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu ($S^*, I^*, I^*{}_1, I^*{}_2$). Misalkan titik ekuilibrium S adalah S^*, sehingga dari persamaan (4.3.b) diperoleh

$$\lambda S - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I = 0$$

dengan $\lambda = r\beta \frac{I}{S+I}$ dan $S = S^*$, maka persamaan (4.3.b) menjadi :

$$r\beta \frac{I}{S^* + I} S^* - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I = r\beta \frac{I}{S^* + I} S^*$$

Karena $I \neq 0$, maka diperoleh

$$(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2) = \frac{r\beta S^*}{S^* + I}$$

$$\Leftrightarrow \ (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)(S^* + I) = r\beta S^*$$

$$\Leftrightarrow \ S^*(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2) + I(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2) = r\beta S^*$$

$$\Leftrightarrow \ I(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2) = r\beta S^* - S^*(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$I = \left(\frac{r\beta - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)}{(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)}\right) S^*$$

$$I = \left(\frac{r\beta}{\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2} - 1\right) S^*$$

Didefinisikan $\Re_0 = \frac{r\beta}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2}$, maka diperoleh I untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $I^* = (\Re_0 - 1)\, S^*$.

Selanjutnya subtitusi I^* ke dalam persamaan (4.3.c) dan (4.3.d) di atas, sehigga persamaan (4.3.c) menjadi,

$$\alpha_1(\Re_0 - 1)\, S^* - (\mu + \gamma_1)I_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\mu+\gamma_1)I_1 = \alpha_1(\Re_0-1)\,S^*$$

$$I_1 = \left(\frac{\alpha_1}{\mu+\gamma_1}\right)(\Re_0-1)\,S^*$$

dan persamaan (4.3.d) menjadi

$$\alpha_2(\Re_0-1)\,S^* - (\mu+\gamma_2)I_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\mu+\gamma_2)I_2 = \alpha_2(\Re_0-1)\,S^*$$

$$I_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\mu+\gamma_2}\right)(\Re_0-1)\,S^*$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan I_1 dan I_2 yaitu $I^*{}_1 = \left(\frac{\alpha_1}{\mu+\gamma_1}\right)(\Re_0 - 1)\,S^*$ dan $I^*{}_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\mu+\gamma_2}\right)(\Re_0-1)\,S^*$.

Selanjutnya subtitusi $I^* = (\Re_0-1)\,S^*$ ke dalam persamaan (4.3.a) di atas sehingga

$$\mu\big(S^0 - S(t)\big) - \lambda(t)S(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \mu(S^0-S) - r\beta\frac{I}{S+I}S = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \mu S^0 - \mu S - \frac{r\beta IS}{S+I} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \mu S^0(S+I) - \mu S\,(S+I) - r\beta IS = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \mu S^0 S + \mu S^0 I - \mu S^2 - \mu SI - r\beta IS = 0$$

$$\mu S^0 S^* + \mu S^0(\Re_0-1)\,S^* - \mu S^{*2} - \mu S^{*2}(\Re_0-1) - r\beta(\Re_0-1)S^{*2} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ S^*\big(\mu S^0 + \mu S^0(\Re_0-1)\big) - S^{*2}(\mu + \mu(\Re_0-1) + r\beta(\Re_0-1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{S^*}{S^{*2}}\big(\mu S^0 + \mu S^0(\Re_0-1)\big) - \frac{S^{*2}}{S^{*2}}(\mu + \mu(\Re_0-1) + r\beta(\Re_0-1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{S^*}\big(\mu S^0 + \mu S^0(\Re_0-1)\big) - (\mu + \mu(\Re_0-1) + r\beta(\Re_0-1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{S^*}\big(\mu S^0 + \mu S^0(\Re_0-1)\big) = \mu + \mu(\Re_0-1) + r\beta(\Re_0-1)$$

$$\Leftrightarrow\ S^* = \frac{\mu S^0 + \mu S^0(\Re_0-1)}{\mu + \mu(\Re_0-1) + r\beta(\Re_0-1)}$$

$$= \frac{\mu S^0 + \mu S^0\Re_0 - \mu S^0}{\mu + \mu\Re_0 - \mu + r\beta(\Re_0-1)}$$

$$= \frac{\mu S^0\Re_0}{\mu\Re_0 + \Re_0(\mu+\gamma)\left(1 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{(\mu+\gamma)}\right)(\Re_0-1)}$$

$$= \frac{\mu S^0}{\mu + \left((\mu+\gamma)\left(1 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{(\mu+\gamma)}\right)\right)(\Re_0 - 1)}$$

$$= \frac{\mu S^0}{\mu + \big((\mu+\gamma) + (\alpha_1+\alpha_2)\big)(\Re_0 - 1)}$$

$$= \frac{\mu S^0}{\mu + (\mu+\gamma)(\Re_0 - 1) + (\alpha_1+\alpha_2)(\Re_0 - 1)}$$

$$= \frac{\mu S^0}{(\alpha_1+\alpha_2)(\Re_0 - 1) + \mu + \mu\Re_0 - \mu + \gamma\Re_0 - \gamma}$$

$$= \frac{\mu S^0}{(\alpha_1+\alpha_2)(\Re_0 - 1) + \mu\Re_0 + \gamma\Re_0 - \gamma}$$

$$= \frac{\mu S^0}{(\alpha_1+\alpha_2)(\Re_0 - 1) + \Re_0(\mu+\gamma) - \gamma}$$

$$= \frac{\mu S^0/(\mu+\gamma)}{\big((\alpha_1+\alpha_2)/(\mu+\gamma)\big)(\Re_0 - 1) + \Re_0 - \gamma/(\mu+\gamma)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik penyakit adalah ($S^*, I^*, {I^*}_1, {I^*}_2$), dengan

$$S^* = \frac{\mu S^0/(\mu+\gamma)}{\big((\alpha_1+\alpha_2)/(\mu+\gamma)\big)(\Re_0 - 1) + \Re_0 - \gamma/(\mu+\gamma)}$$

$$I^* = (\Re_0 - 1)\, S^*$$

$${I^*}_1 = \left(\frac{\alpha_1}{\mu+\gamma_1}\right)(\Re_0 - 1)\, S^*$$

$${I^*}_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\mu+\gamma_2}\right)(\Re_0 - 1)\, S^*$$

4.4 Bilangan Reproduksi Dasar ($\boldsymbol{\Re_0}$)

Hethcote (1994) menyebutkan pada suatu populasi yang di dalamnya terdapat penyebaran penyakit infeksi, dimungkinkan terjadi peningkatan ataupun penurunan jumlah individu yang terinfeksi. Semakin bertambahnya individu yang terinfeksi dapat mengakibatkan kondisi endemik, sedangkan semakin berkurangnya individu yang terinfeksi dapat mengakibatkan penyakit infeksi menghilang dengan sendirinya dari populasi. Oleh karena itu perlu ditentukan suatu parameter untuk mengetahui hal yang demikian. Parameter yang dimaksud adalah *basic reproduction number* ($\Re_0$). Secara garis besar perhitungan dari $\Re_0$

untuk suatu model menggunakan metode *next generation operator* (NGO). Oleh karena itu dalam penentuannya digunakan rumus eksplisit dengan menentukan jari-jari spektral ($\rho(FV^{-1}$) dari sistem persamaan (4.2) dengan $\lambda = r\beta\frac{I}{S+I}$. Sehingga sistem persamaan (4.2) menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S^0 - S) - r\beta\frac{I}{S+I}S$$

$$\frac{dI}{dt} = r\beta\frac{I}{S+I}S - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1 I - (\mu + \gamma_1)I_1 \tag{4.4}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha_2 I - (\mu + \gamma_2)I_2$$

selanjutnya akan tentukan matriks Jacobian dari sistem persamaan (4.4), dapat dilihat dari uraian di bawah ini :

misalkan :

$$f_1(S, I, I_1, I_2) = \mu S^0 - \mu S - r\beta\frac{I}{S+I}S$$

$$f_2(S, I, I_1, I_2) = r\beta\frac{I}{S+I}S - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I$$

$$f_3(S, I, I_1, I_2) = \alpha_1 I - (\mu + \gamma_1)I_1$$

$$f_4(S, I, I_1, I_2) = \alpha_2 I - (\mu + \gamma_2)I_2$$

- Fungsi $f_1(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = \frac{\partial(\mu S^0 - \mu S - r\beta\frac{I}{S+I}S)}{\partial S} = -\mu - \frac{r\beta I^2}{(S+I)^2}$$

- Fungsi $f_1(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f_1}{\partial I} = \frac{\partial(\mu S^0 - \mu S - r\beta\frac{I}{S+I}S)}{\partial I} = \frac{r\beta S^2}{(S+I)^2}$$

- Fungsi $f_1(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_1 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial I_1} = \frac{\partial(\mu S^0 - \mu S - r\beta\frac{I}{S+I}S)}{\partial I_1} = 0$$

- Fungsi $f_1(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_2 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial I_2} = \frac{\partial(\mu S^0 - \mu S - r\beta \frac{I}{S+I} S)}{\partial I_2} = 0$$

- Fungsi $f_2(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{\partial(r\beta \frac{I}{S+I} S - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I)}{\partial S} = \frac{r\beta I^2}{(S+I)^2}$$

- Fungsi $f_2(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f_2}{\partial I} = \frac{\partial(r\beta \frac{I}{S+I} S - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I)}{\partial I} = \frac{r\beta S^2}{(S+I)^2} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2$$

- Fungsi $f_2(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_1 :

$$\frac{\partial f_2}{\partial I_1} = \frac{\partial(r\beta \frac{I}{S+I} S - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I)}{\partial I_1} = 0$$

- Fungsi $f_2(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_2 :

$$\frac{\partial f_2}{\partial I_2} = \frac{\partial(r\beta \frac{I}{S+I} S - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I)}{\partial I_2} = 0$$

- Fungsi $f_3(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f_3}{\partial S} = \frac{\partial(\alpha_1 I - (\mu + \gamma_1)I_1)}{\partial S} = 0$$

- Fungsi $f_3(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f_3}{\partial I} = \frac{\partial(\alpha_1 I - (\mu + \gamma_1)I_1)}{\partial I} = \alpha_1$$

- Fungsi $f_3(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_1 :

$$\frac{\partial f_3}{\partial I_1} = \frac{\partial(\alpha_1 I - (\mu + \gamma_1)I_1)}{\partial I_1} = -\mu - \gamma_1$$

- Fungsi $f_3(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_2 :

$$\frac{\partial f_3}{\partial I_2} = \frac{\partial(\alpha_1 I - (\mu + \gamma_1)I_1)}{\partial I_2} = 0$$

- Fungsi $f_4(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f_4}{\partial S} = \frac{\partial(\alpha_2 I - (\mu + \gamma_2)I_2)}{\partial S} = 0$$

- Fungsi $f_4(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f_4}{\partial I} = \frac{\partial(\alpha_2 I - (\mu + \gamma_2)I_2)}{\partial I} = \alpha_2$$

- Fungsi $f_4(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_1 :

$$\frac{\partial f_4}{\partial I_1} = \frac{\partial(\alpha_2 I - (\mu + \gamma_2)I_2)}{\partial I_1} = 0$$

- Fungsi $f_4(S, I, I_1, I_2)$ diturunkan terhadap variabel I_2 :

$$\frac{\partial f_4}{\partial I_2} = \frac{\partial(\alpha_2 I - (\mu + \gamma_2)I_2)}{\partial I_2} = -\mu - \gamma_2$$

Sehingga matriks Jacobian dari sistem persamaan (4.4) adalah

$$Jf(S, I, I_1, I_2) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{r\beta I^2}{(S+I)^2} & \frac{r\beta S^2}{(S+I)^2} & 0 & 0 \\ \frac{r\beta I^2}{(S+I)^2} & \frac{r\beta S^2}{(S+I)^2} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\mu - \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\mu - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari matriks Jacobian sistem persamaan (4.4) terhadap titik kesetimbangan $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2) = (S^0, 0,0,0)$, maka diperoleh $Jf(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)$ adalah:

$$Jf(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2) = \begin{bmatrix} -\mu & r\beta & 0 & 0 \\ 0 & r\beta - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\mu - \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\mu - \gamma_1 \end{bmatrix}$$

Didefinisikan matriks F dan V adalah sebagai berikut :

$$F = \begin{bmatrix} r\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$V = \begin{bmatrix} -\mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\mu - \gamma_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & -\mu - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

maka F adalah matriks nonnegatif dan V adalah matriks taksingular. Oleh karena itu rasio reproduksi dasar ($\Re_0$) sama dengan ($\rho(FV^{-1}$) dan ($\rho(FV^{-1}$) sama dengan *trace* dari matriks FV^{-1}. Sehingga didapat rumus eksplisit untuk $\Re_0$ adalah :

$$\Re_0 = (\rho(FV^{-1}) = trace\ (FV^{-1})$$

dengan

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\mu(\mu+\gamma_1+\gamma+\alpha_1+\alpha_2)+\gamma_1(\gamma+\alpha_1+\alpha_2)} & \frac{1}{\mu+\gamma_1} & 0 \\ \frac{\alpha_2}{\mu(\mu+\gamma_1+\gamma+\alpha_1+\alpha_2)+\gamma_1(\gamma+\alpha_1+\alpha_2)} & 0 & \frac{1}{\mu+\gamma_2} \end{bmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} r\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\mu(\mu+\gamma_1+\gamma+\alpha_1+\alpha_2)+\gamma_1(\gamma+\alpha_1+\alpha_2)} & \frac{1}{\mu+\gamma_1} & 0 \\ \frac{\alpha_2}{\mu(\mu+\gamma_1+\gamma+\alpha_1+\alpha_2)+\gamma_1(\gamma+\alpha_1+\alpha_2)} & 0 & \frac{1}{\mu+\gamma_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{r\beta}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $\Re_0 = trace(FV^{-1}) = r\beta \frac{1}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2}$

Teorema 4.1 Jika R_0 menjadi bilangan reproduksi dasar untuk model SIR dan $\Re_0$ menjadi bilangan reproduksi dasar kestabilan *behavior* model SIR, sehingga $R_0 = \Re_0 \left(1 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\mu+\gamma}\right)$.

Bukti :

$$R_0 = r\beta \frac{1}{\mu+\gamma} \Longrightarrow r\beta = (\mu+\gamma)R_0$$

$$\Re_0 = r\beta \frac{1}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\Longrightarrow \Re_0 = (\mu+\gamma)R_0 \frac{1}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\Re_0}{R_0} = \frac{(\mu+\gamma)}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_0}{\Re_0} = \frac{\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2}{\mu + \gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_0}{\Re_0} = \left(1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\mu + \gamma}\right)$$

$$\Rightarrow R_0 = \Re_0 \left(1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\mu + \gamma}\right)$$

4.5 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.1), maka akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut.

Teorema 4.2 Jika $\Re_0 < 1$ maka kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal.

Bukti :

Berdasarkan matriks Jacobian $Jf(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)$ maka akan ditenetukan det $\left(\lambda I - Jf(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)\right) = 0$ untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian.

$$\left(\lambda I - Jf(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)\right)$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & r\beta & 0 & 0 \\ 0 & r\beta - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\mu - \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\mu - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda + \mu & r\beta & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - (r\beta - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \lambda + \mu + \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \lambda + \mu + \gamma_2 \end{bmatrix}$$

det $\left(\lambda I - Jf(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)\right) = 0$, berarti

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \mu & r\beta & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - (r\beta - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \lambda + \mu + \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \lambda + \mu + \gamma_2 \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik dari det $\left(\lambda I - Jf(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)\right) = 0$ diatas adalah

$(\lambda + \mu)(\lambda - (r\beta - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2))(\lambda + \mu + \gamma_1)(\lambda + \mu + \gamma_2)$.

Sehingga nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas :

$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = r\beta - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2,\ \lambda_3 = -\mu - \gamma_1$, dan $\lambda_4 = -\mu - \gamma_2$

Berdasarkan penyelesaiaan diatas, dapat dilihat bahwa $\lambda_1 = -\mu < 0$, $\lambda_2 = r\beta - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 < 0$ karena $\Re_0 < 1$, $\lambda_3 = -\mu - \gamma_1 < 0$ dan $\lambda_4 = -\mu - \gamma_2 < 0$. Sehingga berdasarkan teorema 4.1 di atas, maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2) = (S^0, 0,0,0)$ stabil asimtotik lokal jika $\Re_0 < 1$ dan $r\beta < \mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2$, Hal ini berarti bebas penyakit atau terjadi penurunan proporsi individu infeksi, sehingga penyakit infeksi berangsur-angsur berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Semakin berkurangnya individu infeksi mengakibatkan proporsinya menjadi nol setelah memasuki waktu tertentu. Tidak ada individu infeksi didalam populasi mengaibatkan berhentinya penyebaran penyakit infeksi, sehingga tidak terjadi perubahan populasi individu pada masing-masing kelompok. Pada situasi ini, indivudu yang berada dalam populasi merupakan individu semunya *susceptible*. Oleh karena itu, kestabilan yang dicapai adalah stabil asimtotik lokal.

Teorema 4.3 Jika $\Re_0 > 1$ maka kesetimbangan endemik penyakit adalah tidak stabil.

Bukti :

Sama seperti penyelesaiaan pada titik kesetimbangan bebas penyakit di atas, maka kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit dapat diselidiki melalui uraian di bawah ini :

Berdasarkan matiks Jacobian $Jf(S, I, I_1, I_2)$ di atas, maka matiks Jacobian titik kesetimbangan endemik penyakit $(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*)$:

$$Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*)$$
$$= \begin{bmatrix} -\mu - \frac{r\beta I^{*2}}{(S^* + I^*)^2} & \frac{r\beta S^{*2}}{(S^* + I^*)^2} & 0 & 0 \\ \frac{r\beta I^{*2}}{(S^* + I^*)^2} & \frac{r\beta S^{*2}}{(S^* + I^*)^2} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\mu - \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\mu - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobian dicari $det\left(\lambda I - Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*)\right) = 0$

$$\left(\lambda I - Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*)\right) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} -\mu - \frac{r\beta I^{*2}}{(S^* + I^*)^2} & \frac{r\beta S^{*2}}{(S^* + I^*)^2} & 0 & 0 \\ \frac{r\beta I^{*2}}{(S^* + I^*)^2} & \frac{r\beta S^{*2}}{(S^* + I^*)^2} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\mu - \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\mu - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

det $\left(\lambda I - Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*)\right) = 0$, berarti

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \mu + \frac{r\beta I^{*2}}{(S^*+I^*)^2} & \frac{r\beta S^{*2}}{(S^*+I^*)^2} & 0 & 0 \\ \frac{r\beta I^{*2}}{(S^*+I^*)^2} & \lambda - \left(\frac{r\beta S^{*2}}{(S^*+I^*)^2} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \lambda + \mu + \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \lambda + \mu + \gamma_2 \end{bmatrix}$$
$$= 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik :

$$\left(\lambda + \mu + \frac{r\beta I^{*2}}{(S^* + I^*)^2}\right)\left(\lambda - \left(\frac{r\beta S^{*2}}{(S^* + I^*)^2} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2\right)\right)(\lambda + \mu + \gamma_1)$$

$(\lambda + \mu + \gamma_2)$ subtitusi $I^* = (\Re_0 - 1)\, S^*$, sehingga persamaan karakteristik menjadi

$$\left(\lambda + \mu + \frac{r\beta(\Re_0 - 1)^2 S^{*2}}{S^{*2} + 2S^{*2}(\Re_0 - 1) + (\Re_0 - 1)^2 S^{*2}}\right)\left(\lambda - \left(\frac{r\beta S^{*2}}{S^{*2} + 2S^{*2}(\Re_0 - 1) + (\Re_0 - 1)^2 S^{*2}} - \mu - \right.\right.$$
$$\left.\left.\gamma - \alpha_1 - \alpha_2\right)\right)(\lambda + \mu + \gamma_1)(\lambda + \mu + \gamma_2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda + \mu + \frac{r\beta(\Re_0 - 1)}{2 + (\Re_0 - 1)}\right)$$
$$\left(\lambda - \left(\frac{r\beta}{(\Re_0 - 1)(2 + (\Re_0 - 1))} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2\right)\right)(\lambda + \mu + \gamma_1)(\lambda + \mu + \gamma_2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda + \mu + \frac{r\beta(\Re_0 - 1)}{2 + (\Re_0 - 1)}\right)$$
$$\left(\lambda - \left(\frac{r\beta}{(\Re_0 - 1)(\Re_0 + 1)} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2\right)\right)(\lambda + \mu + \gamma_1)(\lambda + \mu + \gamma_2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda + \mu + \frac{r\beta(\Re_0 - 1)}{2 + (\Re_0 - 1)}\right)$$

$$\left(\lambda - \left(\frac{r\beta}{{\Re_0}^2 - 1} - \mu - \gamma - \alpha_1 - \alpha_2\right)\right)(\lambda + \mu + \gamma_1)(\lambda + \mu + \gamma_2)$$

Sehingga nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas :

$\lambda_1 = -\mu - \frac{r\beta(\Re_0-1)}{2+(\Re_0-1)}$, $\lambda_2 = \frac{r\beta}{{\Re_0}^2-1} - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)$, $\lambda_3 = -\mu - \gamma_1$ dan $\lambda_4 = -\mu - \gamma_2$. Berdasarkan hasil tersebut, jelas $\lambda_1 = -\mu - \frac{r\beta(\Re_0-1)}{2+(\Re_0-1)} < 0$ karena $\Re_0 > 1$ dan λ_3, $\lambda_4 < 0$, sementara $\lambda_2 = \frac{r\beta}{{\Re_0}^2-1} - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)$ dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\lambda_2 = \frac{r\beta}{{\Re_0}^2 - 1} - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\lambda_2 = r\beta - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)\left({\Re_0}^2 - 1\right)$$

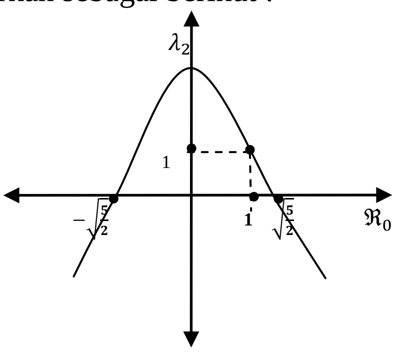
$$\lambda_2 = \frac{r\beta}{(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)} - \frac{(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)\left({\Re_0}^2 - 1\right)}{(\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\lambda_2 = \Re_0 - 1\left({\Re_0}^2 - 1\right)$$

$$\lambda_2 = -{\Re_0}^2 + \Re_0 + 1$$

$$\lambda_2(\Re_0) = -{\Re_0}^2 + \Re_0 + 1$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh nilai ${\Re_0}_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ dan ${\Re_0}_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ sehingga dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.2 Kurva $\boldsymbol{\lambda_2 = -{\Re_0}^2 + \Re_0 + 1}$ **dengan nilai** $\boldsymbol{\left({\Re_0}_1, {\Re_0}_2\right) = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$

Berdasarkan gambar dan teorema 4.3 di atas maka diperoleh kesimpulan :

1. Jika $1 < \Re_0 < \sqrt{\frac{5}{2}}$ maka $\lambda_2 > 0$, sehingga titik ekuilibrium endemik penyakit tidak stabil.
2. Jika $\Re_0 > \sqrt{\frac{5}{2}}$ maka $\lambda_2 < 0$, sehingga titik ekuilibrium endemik penyakit stabil.

4.6 Simulasi

4.6.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Dengan mengambil parameter $S^0 = 1$, $\beta = 0{,}8$, $r = 0{,}8$, $\mu = 0{,}6$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}4$, $\gamma_1 = 0{,}1$, dan $\gamma_2 = 0{,}05$. Subtitusikan nilai parameter ke sistem persamaan (4.1) sehingga diperoleh sistem persamaan (4.5) berikut:

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}6(1 - S) - \left(\frac{0{,}2(0{,}8)I}{S + I}\right)S$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{0{,}2(0{,}8)I}{S + I}\right)S - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2)I$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0{,}1I - (0{,}6 + 0{,}1)I_1$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0{,}2I - (0{,}6 + 0{,}05)I_2$$

$$\frac{dR}{dt} = 0{,}4I + 0{,}1I_1 + 0{,}05I_2 - 0{,}6R$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah $\left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2\right) = (S^0, 0{,}0{,}0) = (1{,}0{,}0{,}0)$. Bilangan reproduksi dasar sebesar $\Re_0 = r\beta\frac{1}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2}$ =0,492. Untuk menentukan kestabilannya, maka subtitusikan nilai parameter ke matriks Jacobian berikut :

$$Jf(\hat{S},\hat{I},\hat{I}_1,\hat{I}_2)$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}6 & (0{,}8)(0{,}8) & 0 & 0 \\ 0 & (0{,}8)(0{,}8) - 0{,}6 - 0{,}4 - 0{,}1 - 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}6 - 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & -0{,}6 - 0{,}05 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}64 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}66 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & -0{,}65 \end{bmatrix}$$

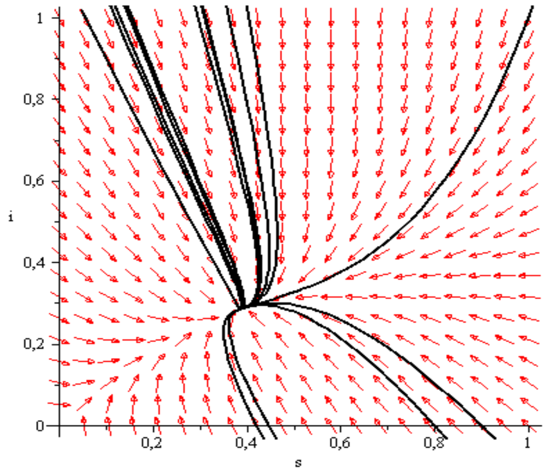
Bentuk linear dari sistem persamaan (4.5) sebagai berikut :

$$Jf(\hat{S},\hat{I},\hat{I}_1,\hat{I}_2)\begin{pmatrix} S \\ I \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}64 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}66 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & -0{,}65 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} S \\ I \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}6S + 0{,}64I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \\ 0 \cdot S - 0{,}66I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \\ 0 \cdot S + 0{,}1I - 0{,}7I_1 + 0 \cdot I_2 \\ 0 \cdot S + 0{,}2I + 0 \cdot I_1 - 0{,}65I_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan (4.5) menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}6S + 0{,}64I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \qquad (4.5.a)$$
$$\frac{dI}{dt} = 0 \cdot S - 0{,}66I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \qquad (4.5.b)$$
$$\frac{dI_1}{dt} = 0 \cdot S + 0{,}1I - 0{,}7I_1 + 0 \cdot I_2 \qquad (4.5.c)$$
$$\frac{dI_2}{dt} = 0 \cdot S + 0{,}2I + 0 \cdot I_1 - 0{,}65I_2 \qquad (4.5.d)$$

Selanjutnya akan diperoleh gambar dari persamaan (4.5.a) dan (4.5.b). Persamaan (4.5.c) dan (4.5.d) diabaikan karena jelas nilai $I_1, I_2 = 0$ pada persamaan (4.5.a) dan (4.5.b), sehingga dapat digambarkan simulasinya sebagai berikut :



Gambar 4.3 Orbit Kestabilan *Behavior* Model SIR pada Penyakit HIV untuk Titik Ekuilibruim Bebas Penyakit

Kemudian untuk menentukan kestabilannya, hitung det $\left(\lambda I - Jf\left(\hat{S},\hat{I},\hat{I}_1,\hat{I}_2\right)\right) = 0$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda + 0{,}6 & 0{,}64 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 0{,}66 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & \lambda + 0{,}7 & 0 \\ 0 & -0{,}2 & 0 & \lambda + 0{,}65 \end{bmatrix} = 0$$

maka diperoleh persamaan karaktristik $(\lambda + 0{,}6)(\lambda + 0{,}66)(\lambda + 0{,}7)(\lambda + 0{,}65) = 0$. Sehingga nilai eigen- nilai eigen diperoleh $\lambda_1 = -0{,}6$, $\lambda_2 = -0{,}66$, $\lambda_3 = -0{,}7$ dan $\lambda_4 = -0{,}65$. Jadi dapat simpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asitotik lokal.

4.6.2 Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Dengan mengambil parameter $S^0 = 1$, $\beta = 0{,}8$, $r = 0{,}6$, $\mu = 0{,}3$, $\alpha_1 = 0{,}01$, $\alpha_2 = 0{,}02$, $\gamma = 0{,}03$, $\gamma_1 = 0{,}01$, dan $\gamma_2 = 0{,}05$. Subtitusikan nilai parameter ke sistem (4.1) sehingga diperoleh sistem (4.6) berikut:

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}3(1 - S) - \left(\frac{0{,}6(0{,}8)I}{S + I}\right)S$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{0{,}6(0{,}8)I}{S + I}\right)S - (0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}01 + 0{,}02)I$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0{,}01I - (0{,}3 + 0{,}01)I_1$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0{,}02I - (0{,}3 + 0{,}05)I_2$$

$$\frac{dR}{dt} = 0{,}03I + 0{,}01I_1 + 0{,}05I_2 - 0{,}3R$$

Titik ekuilibrium endemik penyakit adalah $(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*) = (0{,}71; 0{,}24; 0{,}023; 0{,}04)$. Bilangan reproduksi dasar sebesar $\Re_0 = r\beta \frac{1}{\mu+\gamma+\alpha_1+\alpha_2}$ =1,333 Untuk menentukan kestabilannya, maka subtitusikan nilai parameter ke matriks Jacobian berikut :

$$Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*) =$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}3 - 0{,}03 & 0{,}268 & 0 & 0 \\ 0{,}037 & -(1{,}333^2) + 1{,}333 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & -0{,}3 - 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 & -0{,}3 - 0{,}05 \end{bmatrix}$$

$$Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*) = \begin{bmatrix} -0{,}337 & 0{,}268 & 0 & 0 \\ 0{,}037 & 0{,}556 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & -0{,}31 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 & -0{,}35 \end{bmatrix}$$

Bentuk linear dari sistem persamaan (4.6) sebagai berikut :

$$Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*) \begin{pmatrix} S \\ I \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}337 & 0{,}268 & 0 & 0 \\ 0{,}037 & 0{,}556 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & -0{,}31 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 & -0{,}35 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S \\ I \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}337S + 0{,}268I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \\ 0{,}037S + 0{,}556I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \\ 0 \cdot S + 0{,}05I - 0{,}31I_1 + 0 \cdot I_2 \\ 0 \cdot S + 0{,}02I + 0 \cdot I_1 - 0{,}35I_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan (4.6) menjadi :

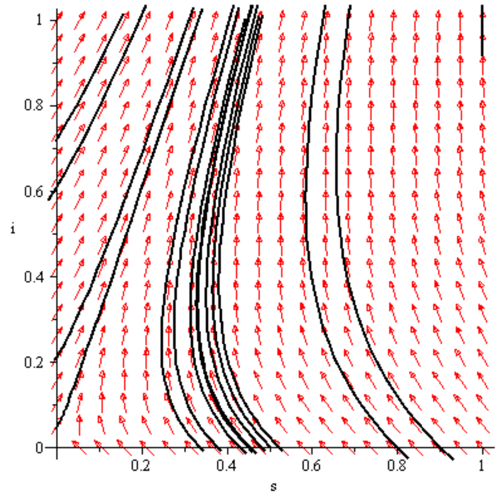
$$\frac{dS}{dt} = -0{,}337S + 0{,}268I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \qquad (4.6.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}037S + 0{,}556I + 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 \qquad (4.6.b)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0 \cdot S + 0{,}05I - 0{,}31I_1 + 0 \cdot I_2 \qquad (4.6.c)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0 \cdot S + 0{,}02I + 0 \cdot I_1 - 0{,}35I_2 \qquad (4.6.d)$$

Selanjutnya akan diperoleh gambar dari persamaan (4.6.a) dan (4.6.b). Persamaan (4.6.c) dan (4.6.d) diabaikan karena jelas nilai I_1,$I_2 = 0$ pada persamaan (4.6.a) dan (4.6.b), sehingga dapat digambarkan simulasinya sebagai berikut :



Gambar 4.4 Orbit Kestabilan *Behavior* Model SIR pada Penyakit HIV untuk Titik Ekuilibruim Endemik Penyakit

Kemudian hitung $\det\left(\lambda I - Jf(S^*, I^*, {I_1}^*, {I_2}^*)\right) = 0$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda + 0{,}337 & -0{,}268 & 0 & 0 \\ -0{,}037 & \lambda - 0{,}556 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & \lambda + 0{,}31 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & \lambda + 0{,}35 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh persamaan karakteristik $(\lambda + 0{,}337)$,$(\lambda - 0{,}556)$,$(\lambda + 0{,}31)$ dan $(\lambda + 0{,}35)$. Sehingga nilai eigen-nilai eigen diperoleh $\lambda_1 = -0{,}337$, $\lambda_2 = 0{,}556$, $\lambda_3 = -0{,}31$ dan $\lambda_4 = -0{,}35$. Jadi dapat simpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik penyakit tidak stabil.

BAB V
PENUTUP

Bab V dalam penelitian ini terdiri dari kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV dan saran bagi pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Kestabilan *behavior* model SIR adalah :

   $$\frac{dS}{dt} = \mu\left(S^0 - S(t)\right) - \lambda(t)S(t)$$
   $$\frac{dI}{dt} = \lambda(t)S(t) - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2)I(t)$$
   $$\frac{dI_1}{dt} = \alpha_1 I(t) - (\mu + \gamma_1)I_1(t)$$
   $$\frac{dI_2}{dt} = \alpha_2 I(t) - (\mu + \gamma_2)I_2(t)$$
   $$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) + \gamma_1 I_1(t) + \gamma_2 I_2(t) - \mu R(t)$$

   dimana S, I, I_1,I_2 dan R masing-masing adalah kelas *susceptible*, kelas *infectives*, *high-infected*, *higher-infected* dan *removed* dalam populasi.

2. Ada dua titik kesetimbangan pada model SIR dengan dengan kestabilan *behavior* yaitu :

   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $\left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2\right) = (S^0, 0,0,0)$.

   b. Titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $(S^*, I^*, I^*{}_1, I^*{}_2)$ dimana

   $$S^* = \frac{\mu S^0/(\mu + \gamma)}{\left((\alpha_1 + \alpha_2)/(\mu + \gamma)\right)(\Re_0 - 1) + \Re_0 - \gamma/(\mu + \gamma)}$$
   $$I^* = (\Re_0 - 1)\, S^*$$
   $$I^*{}_1 = \left(\frac{\alpha_1}{\mu + \gamma_1}\right)(\Re_0 - 1)\, S^*$$
   $$I^*{}_2 = \left(\frac{\alpha_2}{\mu + \gamma_2}\right)(\Re_0 - 1)\, S^*$$

3. Bilangan Reproduksi Dasar ($\Re_0$) dapat didefinikan sebagai berikut :

$$\Re_0 = r\beta \frac{1}{\mu + \gamma + \alpha_1 + \alpha_2}$$

4. Jika $\Re_0 < 1$ maka kesetimbangan bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2)$ adalah stabil asimtotik lokal dan jika $\Re_0 > 1$ maka kesetimbangan endemik penyakit $(S^*, I^*, {I^*}_1, {I^*}_2)$ adalah tidak stabil.

5.2 Saran

Tugas akhir ini memodelkan penyebaran penyakit HIV dengan asumsi-asumsi yang telah ditentukan, dan untuk meyelidiki kestabilan titik kesetimbangannya menggunakan metode linearisasi. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini disarankan menggunakan asumsi dengan adanya migrasi untuk memodelkan penyebaran penyakit HIV, dan menggunakan metode Lyapunov untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan.

DAFTAR PUSTAKA

Brauer, F. dan Castillo-Chavez, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology,* Springer – Verlag, New York. 2000.

Budiantoro, F. Kestabilan Global pada Model Endemik SIR dengan Imigran,*Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Sebelas Maret,* Surakarta. 2009.

Driessche, P. van den dan Watmough, J. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibrium for Compartmental models of Disease Transmission. *Math. Biosci*, Vol. 180, hal 29-48, 2002.

Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation,* Springer-verlag, New York. 1991.

Hethcote, H. W. *Three Basic Epidemiological Models*, Springer-verlag, New York, 1994.

Hethcote, H. W. The Mathematics of Infectectious Diseases, *SIAM Review*, Vol. 42, No. 4, hal 599-653, 2000.

Laksana, A. Model Penyebaran Penyakit Melalui Hubungan Seksual (PHS) : Gonorrhea dan HIV/AIDS, *UGM, Yogyakarta*. 2011.

Meiss, J. D. *Differential Dynamical Systems,* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA. 2007.

Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-verlag, New York. 1991.

Seddighi, S. C., et al. Behavior Stability in Two SIR-Style Model for HIV. *Int. Journal of Math. Analisys,* Vol. 4, No. 9, hal 427-434, 2010.

Tamrin, H. dan Riyanto, M.Z. Model SIR Penyakit Tidak Fatal, *UGM, Yogyakarta.* 2007.

Widodo. *Pengantar Model Matematika*, FMIPA UGM, Yogyakarta. 2007.